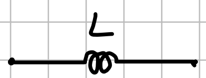
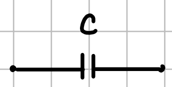
Фреквенцијске карактеристике

Утицај фреквенције на однос амплитуде и фазне разлике два сигнала у колу постоји када су у колу присутни реактивни елементи (калем и кондензатор) и када су вредности њихових параметара значајне:



$Z_L = sL$



$Z_C = \frac{1}{sC}$

$s = \sigma + j\omega \left[\frac{rad}{sec}\right]$ – Комплексна фреквенција

Ако је побуда кола простопериодична, онда комплексна фреквенција има само имагинарни део:

$s = j\omega \quad (\sigma = 0) \Rightarrow Z_L = j\omega L, \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}$

Преносна функција - зависност амплитуда и фазне разлике две величине у колу (улазног и излазног сигнала) од фреквенције.

$$H(s) = Re\{H(s)\} + Im\{H(s)\} = |H(s)| \cdot e^{j\varphi(s)}$$

$|H(s)|$ – Модуо преносне функције (Амплитудска карактеристика)

$\varphi(s)$ - Фаза преносне функције (Фазна карактеристика)

$$|H(s)| = \sqrt{Re^2\{H(s)\} + Im^2\{H(s)\}^2}$$

$$\varphi(s) = Arg(H(s))$$

Подсетник:

$$\operatorname{Arg}(x+iy) = \operatorname{atan2}(y,x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{if } x > 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y \ge 0, \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{if } x < 0 \text{ and } y < 0, \\ +\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{if } x = 0 \text{ and } y < 0, \\ \text{undefined} & \text{if } x = 0 \text{ and } y = 0. \end{cases}$$

Преносна функција линеарних кола увек има облик количника два полинома по комплексној фреквенцији и може се представити на више начина:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{b_m \cdot s^m + b_{m-1} \cdot s^{m-1} + \cdots + b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}$$ - полиномски облик

$$= \frac{a_n (s - z_1)\cdot(s - z_2)\cdot \cdots \cdot(s - z_n)}{b_n (s - p_1)\cdot(s - p_2)\cdot \cdots \cdot(s - p_n)}$$ - факторизовани облик

$$= A_0 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{\omega_{z1}}\right)\cdot\left(1 + \frac{s}{\omega_{z2}}\right)\cdot \cdots \cdot\left(1 + \frac{s}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1 + \frac{s}{\omega_{p1}}\right)\cdot\left(1 + \frac{s}{\omega_{p2}}\right)\cdot \cdots \cdot\left(1 + \frac{s}{\omega_{pm}}\right)}$$ - факторизовани облик са фреквенцијама нула и полова

$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$
$b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ - коефицијенти полинома

$z_1, z_2, \ldots, z_n$ - нуле преносне функције

$p_1, p_2, \ldots, p_m$ - полови преносне функције

A_0 - Константни члан

$\omega_{z1}, \omega_{z2}, \ldots, \omega_{zn}$ - фреквенције нула

$\omega_{p1}, \omega_{p2}, \ldots, \omega_{pm}$ - фреквенције полова

Димензија k-тог коефицијента полинома је k-ти степен секунде:

$$a_k \, [\sec^k]$$

Временске константе:

$$[\Omega \cdot F] \Leftrightarrow [s]$$

$$\left[\frac{H}{\Omega}\right] \Leftrightarrow [s]$$

$$[H \cdot F] \Leftrightarrow [s^2]$$

Производ отпорности и капацитивности, као и количник индуктивности и отпорности има димензију времена. Производ капацитивности и индуктивности има димензију секунде на квадрат.

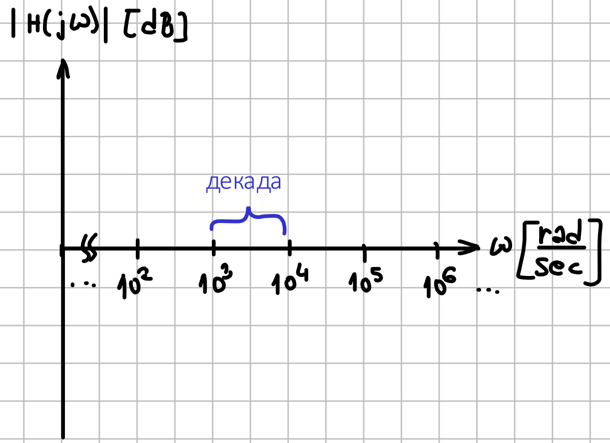
Појачање снаге: $$A_p = \frac{p_i}{p_u} \Rightarrow a_p[dB] = 10 \cdot \log A_p = 10 \log \frac{p_i}{p_u}$$

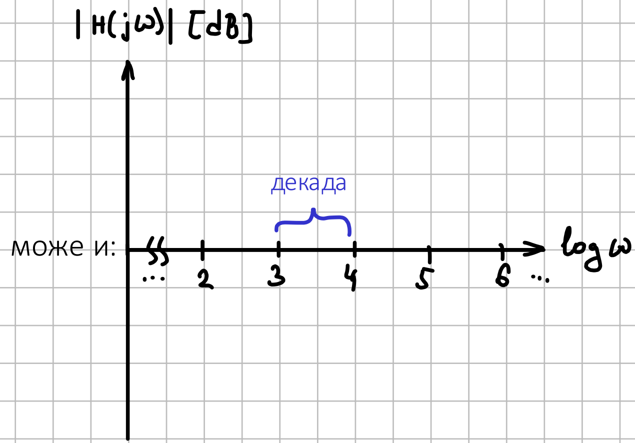
$$\frac{p_i}{p_u} = \frac{\frac{v_i^2}{R_i}}{\frac{v_u^2}{R_u}} = \frac{R_u}{R_i} \cdot \left(\frac{v_i}{v_u}\right)^2 \Rightarrow \frac{p_i}{p_u} \sim \left(\frac{v_i}{v_u}\right)^2$$

Појачање напона: $$A_n = \frac{v_i}{v_u} \Rightarrow a_n[dB] = 20 \log A_n = 20 \log \frac{v_i}{v_u}$$

Појачање струје: $$A_s = \frac{i_i}{i_u} \Rightarrow a_s[dB] = 20 \log A_s = 20 \log \frac{i_i}{i_u}$$

Амплитудске и фазне карактеристике се најлакше могу представити помоћу асимптотских апроксимација- Бодеових дијаграма. Бодеови дијаграми се цртају у "log-log" скали- на хоризонталној оси је фреквенција у логаритамској скали, а на вертикалној логаритам величине која се скицира. Подеоци на хоризонталној оси се најчешће бирају тако да су раздвојени за декаде - сваки подељак је на фреквенцији 10 пута већој од фреквенције претходног:





Пошто је хоризонтална оса дата у логаритамској размери, координатни почетак се налази у бесконачности (јер када је $\omega = 0$ важи $\log\omega \to -\infty$) и због тога га не можемо приказати на дијаграму. Да бисмо нацртали дијаграм, довољно је да прикажемо било који опсег фреквенција који обухвата све фреквенције нула и полова које се појављују у изразу за преносну функцију, пошто оне утичу на облик карактеристика. Најчешће се узима да фреквенција од које почиње да се црта график буде бар за декаду мања (10 пута мања) од најмање фреквенције међу нулама и половима.

Због особине логаритама, као и модула и аргумената комплексних бројева, амплитудска и фазна карактеристика се могу разложити на појединачне компоненте које потичу од константног члана, фактора нула и фактора полова. Сваки од тих чланова можемо представити неком апроксимативном функцијом, и онда те функције можемо суперпонирати (сабрати) како бисмо добили целокупан дијаграм. Апроксимације сваког члана дате су на следећој страни.

$$|H(j\omega)|\,[dB] = 20\log|H(j\omega)| = 20\log\left|A_0\cdot\frac{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right)\cdot\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{z2}}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{zn}}\right)}{\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{p1}}\right)\cdot\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{p2}}\right)\cdot\ \cdots\ \cdot\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{pm}}\right)}\right|$$

$$= \underbrace{20\log|A_0|}_{\text{утицај конст. члана}} + \underbrace{20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z1}}\right| + 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{z2}}\right| + \cdots + 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{zn}}\right|}_{\text{утицаји нула}} -$$

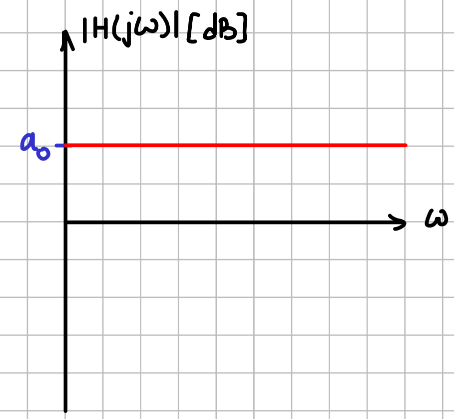
$$- \underbrace{20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p1}}\right| + 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{p2}}\right| + \cdots + 20\log\left|1+j\frac{\omega}{\omega_{pm}}\right|}_{\text{утицаји полова}}$$

$$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega)) = \underbrace{\arg A_0}_{} + \underbrace{\arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right) + \arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right) + \cdots + \arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{z1}}\right)}_{} -$$

$$- \underbrace{\arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{p1}}\right) - \arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{p2}}\right) - \cdots - \arg\left(1+\frac{j\omega}{\omega_{pm}}\right)}_{}$$

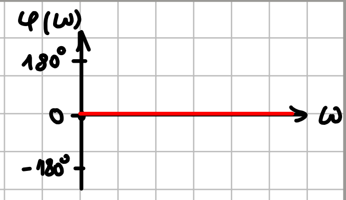
Константни члан

$$a_0 = 20 \log A_0 \ [dB]$$



ако је: $A_0 > 0$

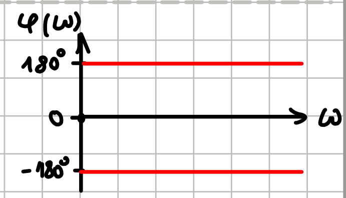
$\Rightarrow \varphi(\omega) = 0$



ако је: $A_0 < 0$

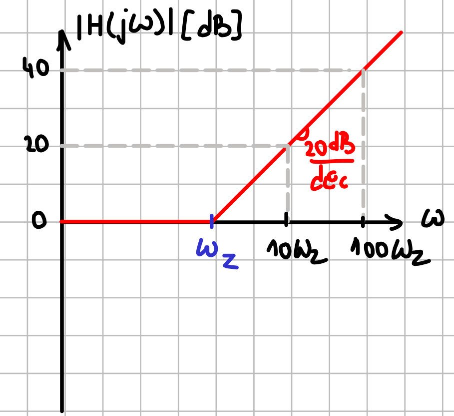
$\Rightarrow \varphi(\omega) = \pm 180°$

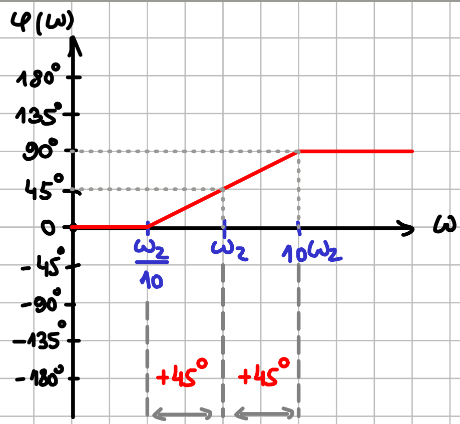
(бирамо "+" или "-" по жељи)



Нула на фреквенцији ωz

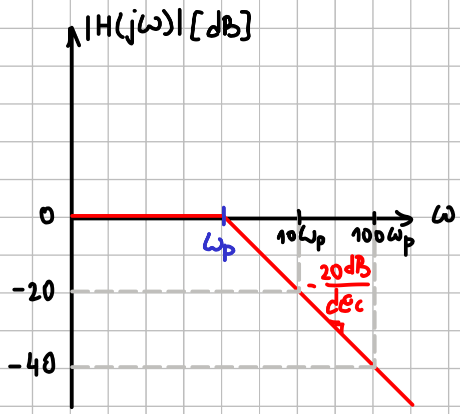
$$1 + \frac{s}{\omega_z}$$

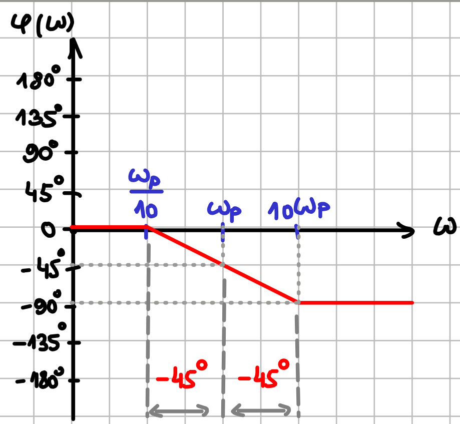




Пол на фреквенцији ωp

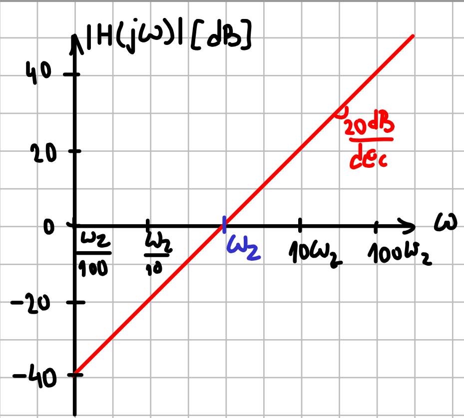
$$\frac{1}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

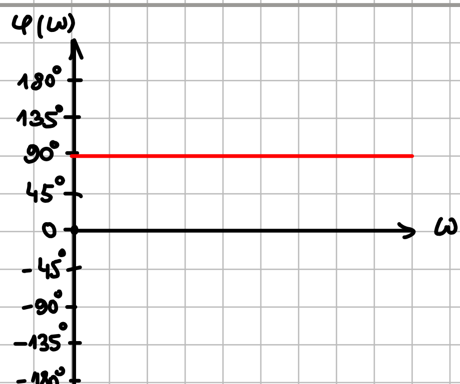




Нула у координатном почетку

$$\frac{s}{\omega_z}$$

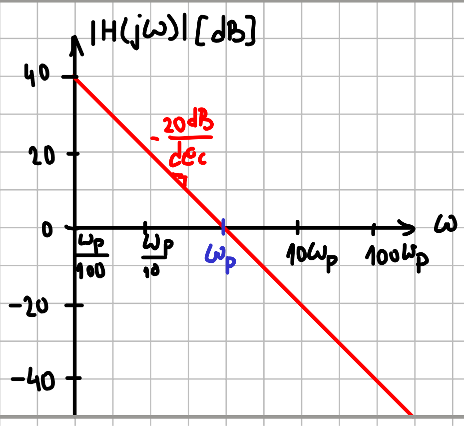


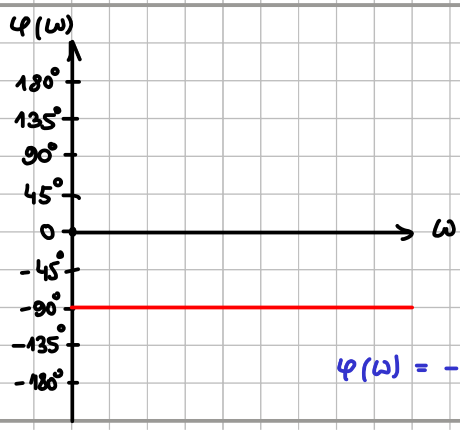


$\varphi(\omega) = 90°$

Пол у координатном почетку

$$\frac{1}{\frac{s}{\omega_p}} = \frac{\omega_p}{s}$$





$\varphi(\omega) = -90°$

1. Нацртати амплитудску и фазну карактеристику за следећу преносну функцију:

$$H(s) = 10^3 \cdot \frac{1 + \frac{s}{10^2}}{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)\left(1 + \frac{s}{10^5}\right)}$$

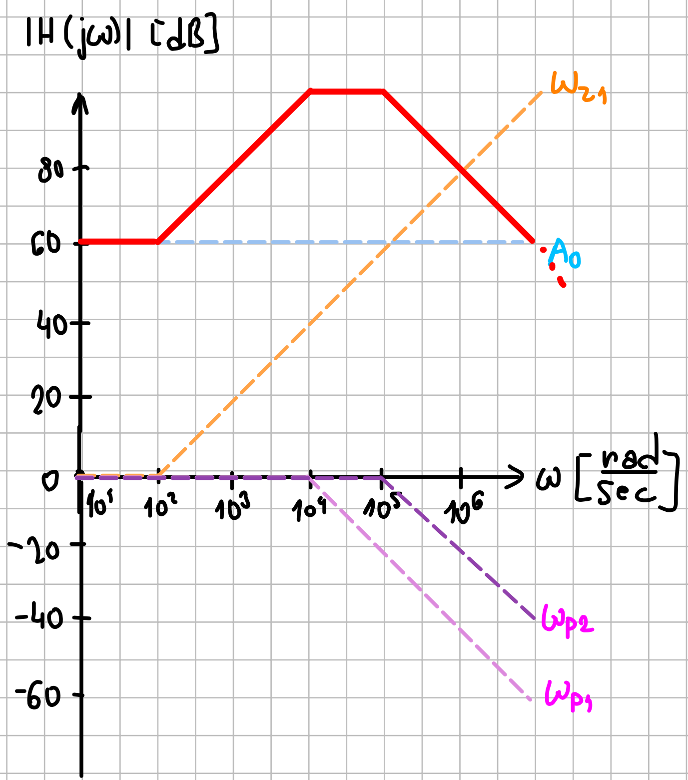
$$H(s) = \boxed{10^3} \cdot \frac{\boxed{1 + \frac{s}{10^2}}}{\boxed{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}\boxed{\left(1 + \frac{s}{10^5}\right)}}$$

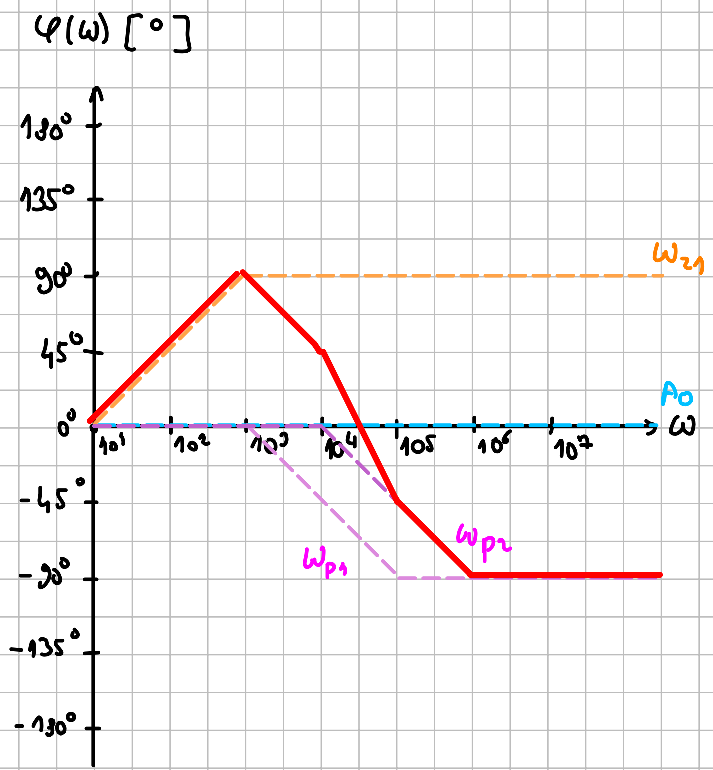
$$A_0 = 10^3 \Rightarrow a_0 = 20 \log A_0 \ [dB] = 20 \log 10^3 \ [dB]$$

$$a_0 = 20 \cdot 3 \ dB \qquad \boxed{a_0 = 60 \ dB}$$

$$\omega_{z1} = 10^2 \ \frac{rad}{sec} \qquad \omega_{p1} = 10^4 \ \frac{rad}{sec} \qquad \omega_{p2} = 10^5 \ \frac{rad}{sec}$$

Амплитудска карактеристика:





2. Нацртати амплитудску и фазну карактеристику за следећу преносну функцију:

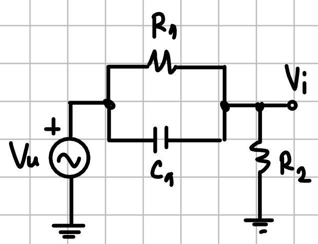
$$H(s) = \frac{-\frac{s}{10^2}}{\left(1 + \frac{s}{10^4}\right)^2}$$

3. За дато коло:

а) Наћи преносну функцију $H(s) = V_i / V_u\ (s)$

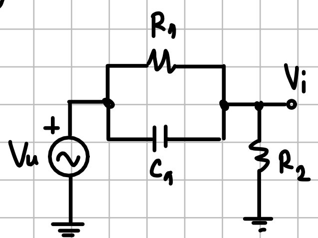
б) Одредити нуле, полове и појачање на средњим фреквенцијама

в) Графички представити амплитудску и фазну карактеристку

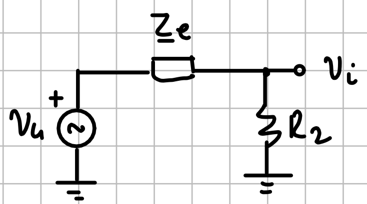


$R_1 = 9\,k\Omega$
$R_2 = 1\,k\Omega$
$C_1 = 0{,}1\ \mu F$

а)



$\Longrightarrow$



$$Z_e = R_1 \parallel \frac{1}{sC_1} = \frac{R_1 \cdot \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} \cdot \frac{sC_1}{sC_1} = \frac{R_1}{sR_1C_1 + 1}$$

$$H(s) = \frac{R_2}{R_2 + Z_e} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{sR_1C_1+1}} \cdot \frac{sR_1C_1+1}{sR_1C_1+1} = \frac{R_2(sR_1C_1+1)}{R_2(sR_1C_1+1) + R_1}$$

$$H(s) = \frac{R_2 \cdot (sR_1C_1 + 1)}{sR_1R_2C + R_2 + R_1} = \frac{R_2 \cdot (sR_1C_1+1)}{(R_1+R_2)\cdot\left(\frac{sR_1R_2C}{R_1+R_2} + 1\right)} = \boxed{\frac{R_2}{R_1+R_2} \cdot \frac{1 + sR_1C_1}{1 + s\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\cdot C_1}}$$

$$H(s) = A_0 \cdot \frac{1 + \frac{s}{\omega_z}}{1 + \frac{s}{\omega_p}}$$

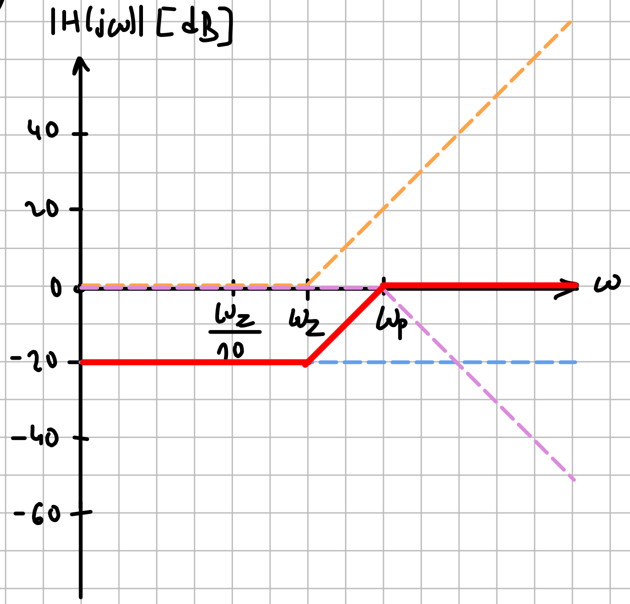
б) $$A_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1k\Omega}{1k\Omega + 9k\Omega} = \frac{1\cancel{k\Omega}}{10\cancel{k\Omega}} = \frac{1}{10} \Rightarrow a_0 = 20\log\frac{1}{10}\ [dB] = -20\,dB$$

$$\omega_z = \frac{1}{R_1C_1} = \frac{1}{9k\Omega \cdot 0{,}1\,\mu F} = \frac{1}{9\cdot10^3\cdot10^{-1}\cdot10^{-6}}\ \frac{rad}{sec} = \frac{10^4}{9}\ \frac{rad}{sec} \approx 1{,}111\ldots\cdot10^3\ \frac{rad}{sec}$$

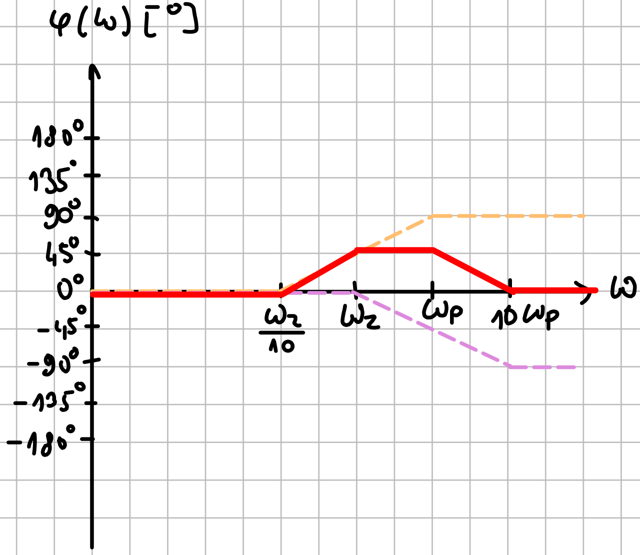
$$\omega_p = \frac{1}{\frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\cdot C_1} \approx \frac{10^5}{9}\ \frac{rad}{sec} \approx 11{,}111\ldots\cdot10^3\ \frac{rad}{sec}$$

$$\omega_p = 10\,\omega_z$$

b)



|H(jω)| [dB]
40
20
0
-20
-40
-60
ω
$\frac{\omega_z}{10}$
ω_z
ω_p

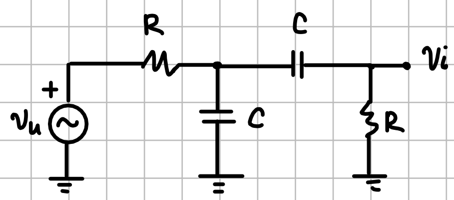


φ(ω) [°]
180°
135°
90°
45°
0°
-45°
-90°
-135°
-180°
ω
$\frac{\omega_z}{10}$
ω_z
ω_p
$10\,\omega_p$

4. а) Наћи преносну функцију

б) Одредити фреквенције нула и полова

в) Нацртати амплитудску карактеристику



$R = 1k\Omega \quad C = 1\mu F$